NOMBRE Y nº de MATRÍCULA:

Tiempo: 2 horas

EXAMEN de RESCATE (19/6/2013)

1. Analizar la convergencia de la sucesión con término. General

$$a_n = \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2}$$

SOLUCIÓN Para analizar su convergencia usamos el criterio de Stolz. Entonces, llamando:

$$a_n = \frac{A_n}{B_n}$$
$$A_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$$
$$B_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2$$

Como $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$es una sucesión creciente que tiende a infinito, será:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - {}^4/_n + {}^1/_{n^2}}{4} = 1$$

2. Calcular los extremos relativos de la función: $f(x,y) = 6xy - x^3 - y^3$

SOLUCIÓN Para hallarlos usamos la condición necesaria

$$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} f'_x = 6y - 3x^2 = 0 \\ f'_y = 6x - 3y^2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Se obtienen los puntos críticos $(0{,}0)$ y $(2{,}2)$

La matriz Hessiana es

$$H = \begin{bmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -6y \end{bmatrix}, con\ \det(H) = 36(xy-1) = \Delta(x,y)$$

Entonces como: $\Delta(0{,}0) = -36 < 0 \Rightarrow (0{,}0)$ es un punto de silla

$\Delta(2{,}2) = 108 > 0\ y\ f''_{x^2} < 0 \Rightarrow (2{,}2)$ es un Máximo

3. Estudiar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(n-3)}$$

Analizar, asimismo, su convergencia absoluta

SOLUCIÓN Para analizar su convergencia usamos el criterio de Leibnitz de series alternadas, llamamos $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}(n-3)}$ y como $(n-3) < ((n+1)-3) = n-2 \Rightarrow \frac{1}{n-3} > \frac{1}{n-2}$ y también es $\sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, será $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}(n-3)} > a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}(n-2)}$, la sucesión es monótona decreciente. También se cumple que tiende a cero. Así concluimos que la serie alternada es convergente.

NOMBRE Y nº de MATRÍCULA:

Tiempo: 2 horas

Para ver si hay convergencia absoluta examinamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n-3)}$ que por el criterio de comparación en el límite con la armónica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ y como $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}(n-3)} \div \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) =$ $= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n-3)\sqrt{n}} = 1 < \infty$, resulta ser también convergente

4. . Calcular la integral doble:

$$\iint_R (x^2y^2)\,dxdy \text{ , siendo } R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$$

SOLUCIÓN: El recinto de integración es la parte superior del recinto delimitado por la elipse centrada en el origen y de semiejes 3 y 2. Sus bordes circulares aconsejan un cambio a coord. polares y uso previo de simetría con respecto de la variable x: $\iint_R (x^2y^2)\,dxdy = \left.\begin{cases} x = 3\rho Cos\theta \\ y = 2\rho Sen\theta \end{cases} J = 6\rho\right\} = 72\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho(\rho^2(\cos\theta)^2\rho^2(\sin\theta)^2)$

$=72\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2 d\theta \int_0^1 \rho^5 d\rho$

Y como

$$\int_0^1 \rho^5 d\rho = \frac{1}{6}$$

$\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi/2}(\cos\theta\sin\theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos^2 2\theta}{4} d\theta =$

$= \int_0^{\pi/2}\frac{1-\frac{1+\cos 4\theta}{2}}{4} d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{8} d\theta - \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\cos 4\theta\, d\theta = \pi/16 - \frac{1}{16}\left[\frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \pi/16$

Por lo tanto

$$\iint_R (x^2y^2)\,dxdy = 72\pi/16$$

5. Determinar el campo de convergencia (c. absoluta, convergencia, divergencia). Convergencia en los puntos limítrofes del intervalo de convergencia y la función suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n}$$

SOLUCIÓN

El radio de convergencia lo calculamos con la fórmula de la raíz de Cauchy-Hadamard

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{4^n}} = \frac{1}{4}$, lo que nos da que R=4. Por lo tanto la serie:

a)converge absolutamente en el intervalo (-4.4)

b) diverge fuera de este intervalo, salvo para 4 y -4 que los analizamos a continuación

c)Si x=4, la serie queda $\sum_{n=1}^{\infty} n$, divergente y en x=-4 obtenemos $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$, también oscilante y no convergente.

En cuanto a su suma para los puntos del intervalo de convergencia, se trata de una serie del tipo aritmético-geométrica y sumará:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n} = \frac{\frac{x}{4}}{\left(1-\frac{x}{4}\right)^2} = \frac{4x}{(4-x)^2}$$

NOMBRE Y nº de MATRÍCULA:

Tiempo: 2 horas

6. Comprobar que la función $\boldsymbol{f(x,y)} = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \boldsymbol{x^2+y^4 \neq 0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x^2+y^4 = 0} \end{cases}$ a pesar de tener límite según todas las direcciones en el origen, no tiene límite en el origen.

SOLUCIÓN: En efecto, a lo largo de todas las rectas $\boldsymbol{y = mx}$, es

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3m^2}{x^2+(mx)^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3m^2}{x^2+(mx)^4} = \lim_{x\to 0}\frac{xm^2}{\mathbf{1}+m^4x^2} = \mathbf{0}$$

Sin embargo, a lo largo de todas las parábolas $x = my^2$, obtenemos que

$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=my^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{y^4 m}{y^4 m^2+y^4} = \frac{m}{m^2+1},$

Lo cual demuestra que el límite citado no existe.

7. *a)* Calcular a) $\lim_{n\to+\infty} n^2 \ln\left[1+\frac{1}{n^2}\right] = \ln \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \ln e^{\lim_{n\to\infty} n^2\left(1+\frac{1}{n^2}-1\right)} = \ln e = 1$

b) *Por el Teorema de la media aritmética, será:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln[1+1]+2^2\ln\left[1+\frac{1}{2^2}\right]+3^2\ln\left[1+\frac{1}{3^2}\right]+\ldots+n^2\ln\left[1+\frac{1}{n^2}\right]}{n} = \ln\lim_{n\to\infty} n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1$$